Е. П. Мелишева

Поволжская государственная социально-гуманитарная академия, г. Самара, melisheva86@mail.ru

КРИТЕРИЙ ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ ЛАВРЕНТЬЕВА – БИЦАДЗЕ

Рассмотрим нагруженное уравнение смешанного типа

$$Lu = \operatorname{sign} y \cdot u_{xx} + u_{yy} + C(y)\, u(x,0) = 0 \tag{1}$$

в прямоугольной области $D = \{(x,y):\ 0 < x < 1, -\alpha < y < \beta\}$, α, β — заданные положительные действительные числа, $C(y) = C_1(y)$ при $y \geqslant 0$, $C(y) = C_2(y)$ при $y \leqslant 0$, $C_i(y)$, $i = 1, 2$ — заданные непрерывные функции.

Краевая задача. Найти в области D функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$u(x,\, y) \in C^1\left(\overline{D}\right) \cap C^2(D_+ \cup D_-); \tag{2}$$

$$Lu(x,\, y) \equiv 0, \quad (x,\, y) \in D_+ \cup D_-; \tag{3}$$

$$u_x(0,\, y) = u_x(1,\, y) = 0, \quad -\alpha \leqslant y \leqslant \beta; \tag{4}$$

$$u(x,\, \beta) = \varphi(x), u(x,\, -\alpha) = \psi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{5}$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$ — заданные достаточно гладкие функции, при этом $\varphi(0) = \varphi(1) = \psi(0) = \psi(1)$, $D_+ = D \cap \{y > 0\}$, $D_- = D \cap \{y < 0\}$.

Отметим, что краевые задачи для нагруженных дифференциальных уравнений в частных производных рассмотрены в работах Нахушева А. М. и его учеников (см [1]). В работе [2] для нагруженного параболо-гиперболического уравнения в прямоугольной области изучена начально-граничная задача, в которой методом спектральных разложений [3] установлен критерий единственности решения этой задачи и само решение построено в виде суммы ряда по собственным функциям соответствующей одномерной задачи на собственные значения.

В данной работе, следуя [2] — [4], установлены необходимые и достаточные условия единственности решения задачи (2)–(5).

Пусть $u(x,y)$ — решение задачи (2) — (5). Рассмотрим следующую систему функций

$$X_k(x) : 1,\ \sqrt{2}\cos\lambda_k x,\ \lambda_k = \pi k,\ k = 1,2,\ldots,\ 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{6}$$

которая ортонормирована, полна и образует базис в пространстве $L_2[0,1]$. Рассмотрим функции

$$u_0(y) = \int_0^1 u(x,y)\,dx, \tag{7}$$

$$u_k(y) = \sqrt{2}\int_0^1 u(x,y)\cos\lambda_k x\,dx,\ k = 1,2,\ldots. \tag{8}$$

На основании (7) и (8), с учетом уравнения (1) и однородных граничных условий (4), получим

$$u_0''(y) = -C_1(y)\,u_0(0), \quad y > 0, \tag{9}$$

$$u_0''(y) = -C_2(y)\,u_0(0), \quad y < 0, \tag{10}$$

$$u_k''(y) - \lambda_k^2 u_k(y) = -C_1(y)\,u_k(0), \quad y > 0, \tag{11}$$

$$u_k''(y) + \lambda_k^2 u_k(y) = -C_2(y)\,u_k(0), \quad y < 0. \tag{12}$$

В силу условий (2) и (5) дифференциальные уравнения (9) – (12) имеют однозначные решения

$$u_0(y) = \begin{cases} \varphi_0 \frac{\alpha[1+C_{20}(y)]+1+C_{20}(-\alpha)}{\Delta_{\alpha\beta}(0)} + \\ + \psi_k \frac{\beta[1+C_{10}(y)]-1-C_{10}(\beta)}{\Delta_{\alpha\beta}(0)}, & y > 0, \\ \varphi_0 \frac{\alpha[1+C_{20}(y)]+1+C_{20}(-\alpha)}{\Delta_{\alpha\beta}(0)} + \\ + \psi_k \frac{\beta[1+C_{10}(y)]-1-C_{10}(\beta)}{\Delta_{\alpha\beta}(0)}, & y < 0, \end{cases} \tag{13}$$

$$u_k(y) = \begin{cases} \psi_k \frac{C_{1k}(y)\operatorname{sh}\lambda_k\beta - C_{1k}(\beta)\operatorname{sh}\lambda_k y}{\lambda_k \Delta_{\alpha\beta}(k)} + \\ + \psi_k \frac{\operatorname{sh}[\lambda_k(y-\beta)]}{\Delta_{\alpha\beta}(k)} + \varphi_k \frac{\Delta_{\alpha y}(k)}{\Delta_{\alpha\beta}(k)}, & y > 0, \\ \psi_k \frac{\Delta_{-y\beta}(k)}{\Delta_{\alpha\beta}(k)} - \varphi_k \frac{\sin\lambda_k(\alpha+y)}{\Delta_{\alpha\beta}(k)} - \\ - \varphi_k \frac{C_{2k}(y)\sin\lambda_k\alpha + C_{2k}(-\alpha)\sin\lambda_k y}{\lambda_k \Delta_{\alpha\beta}(k)}, & y < 0, \end{cases} \tag{14}$$

где

$$C_{10}(y) = \int_0^y C_1(t)(y-t)\,dt, \quad C_{20}(y) = \int_y^0 C_2(t)(t-y)\,dt,$$

$$C_{1k}(y) = \int_0^y C_1(t)\operatorname{sh}[\lambda_k(y-t)]dt,$$

$$C_{2k}(y) = \int_y^0 C_2(t)\sin[\lambda_k(t-y)]dt.$$

$$\Delta_{\alpha y}(k) = \frac{\sin\lambda_k\alpha}{\lambda_k}[C_{1k}(y) - \lambda_k \operatorname{ch}\lambda_k y] - \\ - \frac{\operatorname{sh}\lambda_k y}{\lambda_k}[\lambda_k\cos\lambda_k\alpha + C_{2k}(-\alpha)], \; y \geqslant 0,$$

$$\Delta_{-y\beta}(k) = -\frac{\sin\lambda_k y}{\lambda_k}[C_{1k}(\beta) - \lambda_k \operatorname{ch}\lambda_k\beta] - \\ - \frac{\operatorname{sh}\lambda_k\beta}{\lambda_k}[\lambda_k\cos\lambda_k y + C_{2k}(y)], \; y \leqslant 0.$$

$$\Delta_{\alpha\beta}(0) = \alpha\left[1 + C_{10}(\beta)\right] + \beta\left[1 + C_{20}(-\alpha)\right] \neq 0, \tag{15}$$

$$\Delta_{\alpha\beta}(k) = \frac{\sin\lambda_k\alpha}{\lambda_k}\left[C_{1k}(\beta) - \lambda_k \operatorname{ch}\lambda_k\beta\right] - \\ - \frac{\operatorname{sh}\lambda_k\beta}{\lambda_k}\left[\lambda_k\cos\lambda_k\alpha + C_{2k}(-\alpha)\right] \neq 0. \tag{16}$$

Пусть $u(x,\, y)$ — решение однородной задачи (2) — (5) (при $\varphi(x) = \psi(x) \equiv 0$) и выполнены условия (15), (16) для всех $k \in \mathbb{N}$. Тогда $\varphi_k = \psi_k \equiv 0$, и из формул (7), (8), (13), (14) следует, что при любом $y \in [-\alpha,\, \beta]$

$$\int\limits_0^1 u(x,y)\,dx = 0, \quad \sqrt{2}\int\limits_0^1 u(x,y)\cos\lambda_k x dx = 0, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Отсюда в силу полноты системы (6) в пространстве $L_2[0,1]$ заключаем, что $u(x,\, y) = 0$ почти всюду на $[0,1]$ при любом $y \in [-\alpha, \beta]$. Поскольку в силу (2) функция $u(x,\, y)$ непрерывна в $\overline{D}$, то $u(x,\, y) \equiv 0$ в $\overline{D}$.

В случаях $\Delta_{\alpha\beta}(0) = 0$ или $\Delta_{\alpha\beta}(p) = 0$ построены ненулевые решения однородной задачи (2) — (5).

Таким образом, нами установлен следующий критерий единственности.

Теорема. *Если существует решение задачи* (2) — (5), *то оно единственно тогда и только тогда, когда выполнены условия* (15) *и* (16) *при всех* $k \in \mathbb{N}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нахушев А. М. *Задачи со смещением для уравнений в частных производных.* – М.: Наука, 2006. – 287 с.

2. Сабитов К. Б. *Начально-граничная задача для нагруженного уравнения параболо-гиперболического типа* // Докл. АМАН. Нальчик. – 2009. – Т. 11. – № 1. – С. 66-73.

3. Сабитов К. Б. *Задача Трикоми для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольной области* // Матем. заметки. – 2009. – Т. 86. – Вып. 2. – С. 273-279.

4. Сабитова Ю. К., Бахристова А. А. *Задача Дирихле для уравнения смешанного типа с оператором Лаврентьева – Бицадзе* // Тр. Стерлитамакского филиала Академии наук Республики Башкортостан. Сер. "Физико-математические и технические науки". – УФА: Гилем, 2009. – Вып. 6. – С. 103-110.

Е. В. Михайлов

Поморский государственный университет им. М. В. Ломоносова, m_ ev.85@mail.ru

ВАРИАЦИЯ ЕМКОСТИ КОЛЬЦЕВОГО КОНДЕНСАТОРА В $\overline{\mathbb{R}}^n$

Емкость конденсатора в $\overline{\mathbb{R}}^n$. Конденсатором $C = (E_0, E_1)$ называется пара непустых, непересекающихся компактных множеств $E_0, E_1 \subset \overline{\mathbb{R}}^n$, называющихся его пластинами.

Емкостью конденсатора $C = (E_0, E_1)$ называется величина

$$\operatorname{cap} C = \inf \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^2 dx,$$

где точная нижняя грань интеграла Дирихле берется по семейству всех вещественных непрерывных на $\overline{\mathbb{R}}^n$ функций $u(x)$ класса $\mathrm{ACL}_2(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющих условиям $u|_{E_0} = 0$, $u|_{E_1} = 1$. Через $\nabla u(x)$ обозначен градиент функции u, определенный почти всюду в $\mathbb{R}^n$, интегрирование ведется по n-мерной мере Лебега.